数の世界　～ 過剰数, 不足数編 ～

定義 1 n を自然数とする. n の正の約数のうち自分自身を除いた約数の総和が, n より大きくなるものを**過剰数 *(abundant numbers)*** という. また, n の正の約数のうち自分自身を除いた約数の総和が, n より小さくなるものを**不足数 *(deficient numbers)*** という.

完全数, 友愛数, 社交数は, 自分自身を除く約数の総和により定義されていました. しかし, 完全数で見てきたように, 自分自身を除いた約数の総和が自分自身に戻ることはとてもレアケースです (2020 年 7 月現在, 完全数はメルセンヌ素数と同じ 51 個しか見つかっていません). ほとんどすべての数は, 自分自身を除いた約数の総和が自分自身より大きくなるか, 小さくなるかのどちらかとなります. そこで, 大きくなる数を過剰数, 小さくなる数を不足数と定義します.

例えば, 12 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 12 ですから, 自分自身を除いた約数の総和は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

となり, 12 は過剰数です. また, 15 の約数は 1, 3, 5, 15 ですから, 自分自身を除いた約数の総和は

$$1 + 3 + 5 = 9$$

となり, 15 は不足数となります. では, 自然数の中で過剰数と不足数はどれくらいあるのでしょうか. いつものことですが, 無限に存在するのでしょうか. 実は, 過剰数や不足数は共に無限に存在することが知られています. では, どのように証明するのでしょう. まず, これは不足数だという数を見つけられるでしょうか. 察しがいい人は気づいたと思いますが, 素数が不足数となっています. 素数は 1 と自分自身しか約数にもたないため必ず不足数となります. 素数は無限にあるため (読んでいない人は Math Story 6 を読んでみてください), 不足数は無限に存在することが示され, さらに素数は偶数, 奇数が共に含まれていますから, 偶数の不足数, 奇数の不足数が共に存在することも示されました. では次に, 過剰数はどうでしょうか.

過剰数であった 12 に注目します. 12 を 2 倍した 24 について考えてみましょう. 24 の約数は 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 ですから, 自分自身を除いた約数の総和は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 36$$

となり, 24 は過剰数です. 3 倍した 36 も 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 ですから, 自分自身を除いた約数の総和は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 55$$

となり, 36 は過剰数となります. このように, 過剰数の倍数はまた過剰数となることが知られているため, 過剰数は無限に存在することが示され, 奇数の過剰数として 945 が存在するため, 偶数の過剰数, 奇数の過剰数が共に存在することも示されます.

では, 自然数の中に過剰数と不足数はどれくらいの割合で入っているのかが気になりませんか. こんなことわかるのと思うかもしれませんが, 自然数に占める過剰数の割合が 0.2474 から 0.2480 の間であることが 1998 年に Marc Deléglise によって示されています. つまり, 約 4 分の 1 が過剰数で, 約 4 分の 3 が不足数であるということです. では, また来週 !!