数の世界　～友愛数と社交数編～

前回まで完全数について話してきましたが, 定義を変更するとどんな世界が現れるかまだ見ていきましょう.

定義 1 異なる 2 つの自然数の組で, 自分自身を除いた約数の和が, 互いに他方と等しくなるものを**友愛数** ***(amicable numbers)*** という.

完全数は約数の総和が自分自身の 2 倍という数でしたが, 自分自身を除く約数の総和が自分自身と一致すると言い換えることができます. そこで, 自分自身に戻るのではなく, m の自分自身を除いた約数の総和が n に, n の自分自身を除いた約数の総和が m になるというようにループすることも考えられます. そのような数を定義したのが上の友愛数といわれる数の組です. 小さい方から順に, (220, 284), (1184, 1210), (2620, 2924), (5020, 5564), (6232, 6368), $\cdots\cdots$ となっています. 実際にチェックをしてみましょう. 220 の約数で自分自身を除いた約数の総和は,

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

となり, 284 の約数で自分自身を除いた約数の総和は,

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

となります. 2020 年 1 月の段階で 1225063681 組の友愛数が見つかっています. 具体的に 5 組をあげましたが, 偶数のペアになっていますよね. では, 奇数のペアの友愛数は存在するかが気になりますが, (12285, 14595) などが存在します. では, 偶数と奇数のペアはどうでしょう. これは未解決問題で, 友愛数が無限に存在するか, および, 偶数と奇数のペアである友愛数は存在するかはまだわかっていません.

友愛数を見ていると, 何も 2 つでループしなくてもよいのではと思いませんか. 3 つとか, 4 つでループするものはないのでしょうか. 実はこのような数の組も定義されています.

定義 2 異なる 3 つ以上の自然数の組 $(a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n)$ で, a_1 の自分自身を除いた約数の和が a_2 に, a_2 の自分自身を除いた約数の和が a_3 に, というように続けていき, a_n の自分自身を除いた約数の和が a_1 に戻るものを**社交数** ***(sociable numbers)*** という.

社交数の例としては, 4 個組の社交数 (1264460, 1547860, 1727636, 1305184) や, 5 個組の社交数で (12496, 14288, 15472, 14536, 14264) などが知られていて, 2018 年 10 月の段階で 5410 組の社交数が見つかています. 内訳は 4 個組が 5398 個, 5 個組が 1 個, 6 個組が 5 個, 8 個組が 4 個, 9 個組が 1 個, 28 個組が 1 個となっています. 3 個組が見つかっていないのも驚きですが, 28 個組があるのも驚きですよね. ちなみに次のような組になっています.

14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488, 629072, 589786, 294896, 358336, 418904, 366556, 274924, 275444, 243760, 376736, 381028, 285778, 152990, 122410, 97946, 48976, 45946, 22976, 22744, 19916, 17716

この社交数についても, 何個組の社交数が存在するのか, および, 社交数は無限に存在するかなどは未解決問題となっています. では, また来週 !!