

数の世界 ～素数編 2～

今回は、素数の中で特別な名称のついている双子素数と、その周辺について話していきます。

定義 1 $p, p+2$ が共に素数であるとき、この 2 つの素数を双子素数 (*twin prime*) という。

双子素数とは差が 2 の素数のペアをいいます。双子素数を小さい方からかいていくと、(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), …… となっていくますが、ある特徴に気が付きませんか。最初の子素数 (3, 5) を除くと次のことが知られています。

定理 1 $p \geq 5$ とする。 $p, p+2$ が双子素数であるとき、 $p+1$ は 6 の倍数である。

(3, 5) は間の数字が 4 なので成立しませんが、(3, 5) 以外は間の数は 6 の倍数となります。証明はぜひ考えてみてください。前回は素数が無限にあることを紹介しましたが、双子素数はどれくらいあるのでしょうか。この問題はまだ解かれておらず、無限にあるともないとも示されていません。実は数学の中でとても有名な未解決問題の一つです。

未解決問題 1 (双子素数問題) 双子素数は無限に存在するか。

素数が無限に存在することは 2000 年以上前に示されていますが、差が 2 のペアを考えたらまだ未解決というのは不思議なことですよ。少し問題を変えるだけでいきなり難しくなってしまう数学の一面がよく見える例だと思います。双子素数問題については、次の結果が最近まで有名でした。

定理 2 (J. R. Chen, 1966) $p+2$ が高々 2 個の素数の積となるような素数 p は無限に存在する。

この定理は、 $p, p+2$ が共に素数となるペアが無限にあるかについてはわからないが、 p が素数で、 $p+2$ が素数または 2 つの素数の積となるようなペアは無限にありますよということを主張しています。証明した陳景潤 (Chen Jing Run) は、他にもゴールドバッハ予想、ウェアリング問題などにも功績があります。これでもすごい結果だと思いますが、2013 年に張益唐 (Zhang Yitang) によって次のような結果が示されました。

定理 3 (Y. Zhang, 2013) n 番目の素数を p_n とすると、 $p_{n+1} - p_n \leq 70000000$ を満たす n が無限に存在する。

p_n が n 番目の素数なので、 p_{n+1} は $n+1$ 番目の素数を表しています。双子素数問題の p と $p+2$ はもちろん連続する素数ですから、この定理は差が 2 のペアが無限にあるかについてはわからないが、差が 7000 万以下のペアは無限にありますよということを主張しています。この結果は双子素数問題に大きな影響を与え、7000 万という差が現在は次のところまで改良されています。

定理 4 (D. H. J. Polymath, 2014) n 番目の素数を p_n とすると, $p_{n+1} - p_n \leq 246$ を満たす n が無限に存在する.

ちなみに, 現在知られている最大の双子素数は, 388342 桁の $2996863034895 \times 2^{1290000} \pm 1$ となっています. さて, 双子素数は差が 2 の素数のペアを考えていますが, 差を変えたらどうなるでしょう. 差を奇数にすると 2 つの数のうちどちらかは偶数になってしまうため, ペアとしてありうるのは (2, 3) のみとなってしまい面白くありません. ということで, 差を偶数として考えていきますが, 差が 4 の素数のペア, 差が 6 の素数のペアについてはそれぞれ特別な名称がついています.

定義 2 $p, p + 4$ が共に素数であるとき, この 2 つの素数をいとこ素数 (**cousin prime**) という.

定義 3 $p, p + 6$ が共に素数であるとき, この 2 つの素数をセクシー素数 (**sexy prime**) という.

これらの素数についても, 双子素数と同様に無限に存在するかは知られていません.

未解決問題 2 いとこ素数は無限に存在するか. また, セクシー素数は無限に存在するか.

ここまで素数のペアについて見てきましたが, ペアではなくトリオ (3 つ組) やカルテット (4 つ組) にしたらどうなるか考えてみたくなりませんか. 問題を見たときに, 「ここが変わったらどうなるんだろう」と考えることはとても重要です. 双子素数をみたときに, 双子素数の中に含まれている変えられるものに気づき, 差を変えてみたいとか, 2 つではなく 3 つにしてみたいと思うことはとても大事な感情なので, 皆さんも気づけるようになってください. そうするとまた新しい世界が見えてきますよ. トリオやカルテットの話は次にしたいと思います. では, また来週 !!