

数の世界 ～素数編 1～

今回から数のお話をしていきたいと思います。まずは、数の世界でもとくに有名な素数がテーマです。

定義 1 正の約数として 1 と自分自身のみしかもたない 2 以上の自然数を素数 (**prime**) という。

皆さんもよく知っている素数ですが、素数について定義以外に皆さんはどんなことを知っていますか。ということで、問題です。

問題 1 自然数の中に素数はどれくらいあるか。

これについては、2000 年以上も前に古代エジプトのユークリッドによって解かれています。解答は「無限に存在する」です。ユークリッドはとても有名な数学者で、『原論 ($\Sigma\tau\omicron\chi\epsilon\acute{\iota}\alpha$, ストイケイア)』と呼ばれている数学の本を編纂したことで知られています。皆さんは幾何の授業でお話を聞くことになるでしょう。無限に存在することの証明については、様々な方法が知られています。ここでは、1 つの証明を紹介しておきます。

- Step 1 素数は無限に存在しないと仮定します。ここではわかりやすくするために、素数が 100 個しかないと仮定してみましょう。
- Step 2 すべての素数を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{100}$ とおきます。ここで、100 個の素数をすべて掛け合わせ、さらに 1 を足した新たな数 $P = p_1 p_2 p_3 \dots p_{100} + 1$ を考えます。 P は $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{100}$ とは異なる数となっています。
- Step 3 もし P が素数だとすると、素数が $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{100}$ の 100 個しかなかったことに矛盾がおきます。
- Step 4 よって、 P は素数ではない (合成数といいます) ため、素因数分解を考えると $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{100}$ の積で表せるはずですが、
- Step 5 しかし、 P を $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{100}$ のそれぞれで割ってみると、必ずどれで割っても 1 余ってしまいます。よって、 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{100}$ の積で表せることに矛盾がおきます。
- Step 6 よって、素数が 100 個しかないという仮定がおかしいことになります。ここで、100 個を変えて 1000 個や 10000 個としても同様の議論によって矛盾がおきてしまいます。よって、具体的に何個という仮定がおかしいことになり、素数は無限に存在することが証明されました。

どうでしょうか。背理法という証明方法を使っているのですが、 P という新しい数を考えたところがすごい証明ですよ。では、また来週!!