abc 予想について　その 4

今回で abc 予想のお話は最後ですが, 想像していたものより長くなりました. ぜひ, 気合を入れて読んでみてください.

予想 1 (abc conjecture) $a + b = c$ を満たす互いに素な自然数の組 (a, b, c) に対し, 積 abc の互いに異なる素因数の積を d と表す. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $c > d^{1+\epsilon}$ を満たす組 (a, b, c) は高々有限個しか存在しない.

abc 予想の 2 文目からお話を続けていきましょう. まず, ”任意”という用語です. 数学でとてもよく使われる用語で, 特別に決めたり, 都合よく決めるのではなく, どんなふうに選ばれるかわからないという意味です. **感覚としては, 選ぶときに自分には選択権がなく, 他人が決めることができる, つまり, 何が選ばれても拒否ができない状態です.** そのため, 「任意の自然数 n に対して」という文を数学の世界で翻訳すると, 「どんな自然数 n に対しても」というニュアンスになります.

ちなみに, もうひとつよく使われる数学の用語で”ある”というものがあります. これは, 都合よく決めたり, 適切にうまく選んだりという意味です. **こちらの感覚は, 自分に選択権があり, うまく決めることができる状態です.** そのため, 「ある自然数 n に対して」という文を数学の世界で翻訳すると, 「うまく選んできた自然数 n に対して」というニュアンスになります.

- 「任意の n」 $\cdots\cdots$ 自分には n を決める選択権がないため, n として何が選ばれても文句を言えない.
- 「ある n」 $\cdots\cdots$ 自分に n を決める選択権があり, うまく n を選ぶことができる.

予想では, 「任意の $\epsilon > 0$ に対して」とあるので, 「どんな正の数 ϵ が選ばれたとしても」という意味です. ここで ϵ という文字が出てきますが, これはギリシャ文字でイプシロンといいます (数学ではとても小さい数を表すときによく使います. ギリシャ文字はこれからよく出てくるため, ぜひ覚えてみてください.).

次に, この予想を理解するうえでおそらく一番大変だと思われる $d^{1+\epsilon}$ です. 皆さんは教科書で, 「同じ数をいくつか掛け合わせたものを, その数の累乗という. 」ということを読んだと思います. 今までも何度か出てきていますが, 例えば 4^3 は「4 の 3 乗」といい, 「4 を 3 回掛ける」ことを表しています. この決まりにしたがって, $d^{1+\epsilon}$ を翻訳すると「d を $1+\epsilon$ 回掛ける」ということになります. ここで ϵ として $\epsilon = 1$ が選ばれてきたとしましょう ($\epsilon > 0$ を満たすように相手が選んできたと思ってください.). すると, $d^{1+\epsilon}$ は d^2 なのでこれは計算できます. もし, 相手が $\epsilon = 2$ を選んだとしても, $d^{1+\epsilon}$ は d^3 なのでこれは計算できます. このように, $\epsilon > 0$ として相手が自然数を選んでくれれば $d^{1+\epsilon}$ は計算することができるでしょう.

ところが, 上で述べたように ϵ は**任意**なので, 相手が $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ を選んできたらどうでしょう. $d^{1+\epsilon}$ は「d を $\dfrac{3}{2}$ 回掛ける」ということになりますが, よくわかりません. そこで, 数学では次のようにルールを設定 (定義) します.

定義 1 m, n を自然数, $a > 0$ に対して, $a^{\frac{m}{n}}$ を「n 回掛けると a^m になる正の数」とする.

例えば, $5^{\frac{3}{2}}$ であれば, 「2 回掛けると 5^3, つまり 125 になる数」のことですから, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$ なのでだいたい 11 くらいであることがわかります. $4^{\frac{2}{5}}$ であれば, 「5 回掛けると 4^2, つまり 16 になる数」のことですから, $1.7^5 = 14.19857$, $1.8^5 = 18.89568$ なのでだいたい 1.7 くらいであることがわかります. ちなみにこの定義だけでは, すべてのとき (ϵ として自然数や, 分数が選ばれなかったとき) を網羅できていません. 数学では, そのようなときも定義をするのですが, ここでは深入りせずに止めておきます. 興味を持った方は調べてみてください. この累乗の計算には重要な性質があり, 次が成立します.

結果 1 $a > 1$, $m > n \geqq 1$ のとき, $a^m > a^n \geqq a$ が成立する.

最後に, ” 高々有限個 ” です. 「高々」は「多くても」という意味です. 多くてもといえばよいのですが, 数学では高々というのが一般的です. 有限は無限と対をなす言葉で数え切れることをさします. 「高々有限個」とは, 「多くても数え切れるくらい」ということを表しています. これでやっと *abc* 予想を解読する準備が整いました. *abc* 予想は次を主張しています.

予想 2 (abc conjecture のいいかえ) $\epsilon > 0$ を満たすどんな ϵ に対しても, 互いに素な自然数 a, b で c を $a+b$, d を積 abc の異なる素因数の積としたとき, $c > d^{1+\epsilon}$ が成立するような a, b の組は多くても数え上げられる個数しか存在しない.

ここからは, 皆さんも手を動かして計算しながら読み進めてください. まず, $\epsilon = 1$ としてみましょう. a, b を互いに素となるように決めたときに, 不等式 $c > d^2$ が成立するかをチェックしていきます.

- $a = 1, b = 7$ と決めたとすると, $c = 8$, $d = 2 \times 7 = 14$ となります. そうすると, $c \leqq d^2$ となり不等式は成立しません.

- $a = 4, b = 17$ と決めたとすると, $c = 21$, $d = 2 \times 3 \times 7 \times 17 = 714$ となります. そうすると, $c \leqq d^2$ となり不等式は成立しません.

- $a = 11, b = 25$ と決めたとすると, $c = 36$, $d = 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$ となります. そうすると, $c \leqq d^2$ となり不等式は成立しません.

このように, $\epsilon = 1$ のときは互いに素な a, b の組をとってきても, $c < d^2$ となりそうです. もちろん, すべての互いに素な a, b の組に対してチェックをしないといけませんが, 実は, $\epsilon = 1$ としたときの $c > d^2$ を満たす互いに素な a, b の組はまだ見つかっていません. **ただ, 存在しないとも証明されていません.** ここで, 結果 1 から $\epsilon = 1$ のときに不等式を満たす互いに素な a, b の組が見つかっていないため, $\epsilon \geqq 1$ のときも見つかっていないことになります. このことから, 予想 2 をもう少しいいかえると次のようになります.

予想 3 (abc conjecture のさらなるいいかえ)

- $\epsilon \geqq 1$ を満たすどんな ϵ に対しても, 互いに素な自然数 a, b で c を $a+b$, d を 積 abc の異なる素因数の積としたとき, $c > d^{1+\epsilon}$ が成立するような a, b の組は存在しない.

- $0 < \epsilon < 1$ を満たすどんな ϵ に対しても, 互いに素な自然数 a, b で c を $a+b$, d を 積 abc の異なる素因数の積としたとき, $c > d^{1+\epsilon}$ が成立するような a, b の組は多くても数え上げられる個数しか存在しない.

先ほどの例を見てみると, そもそも d を 2 乗しなくても c より大きくなっています. なぜ, $1+\epsilon$ 乗という不思議な形をしているのでしょうか. $c > d^{1+\epsilon}$ ではなく $c > d$ でも十分なのではと思いますよね. そこで, 先を読む前に次の問題を考えてみてください.

問題 1 互いに素な自然数 a, b で c を $a+b$, d を 積 abc の異なる素因数の積としたとき, $c > d$ が成立するような a, b の組は存在するか.

どうでしょう. 見つけることができましたか. それでは, 解答例を書いていきます.

- $a = 1, b = 8$ と決めたとすると, $c = 9, d = 2 \times 3 = 6$ となります. そうすると, $c > d$ となり問題の不等式は成立します.

- $a = 5, b = 27$ と決めたとすると, $c = 32, d = 2 \times 3 \times 5 = 30$ となります. そうすると, $c > d$ となり問題の不等式は成立します.

- $a = 1, b = 80$ と決めたとすると, $c = 81, d = 2 \times 3 \times 5 = 30$ となります. そうすると, $c > d$ となり問題の不等式は成立します.

このように $c > d$ とすると, a, b の組が見つかるのですが, 実は次のことが知られています.

結果 2 n を自然数とする. 互いに素な自然数 a, b の組 $(a, b) = (1, 3^{2^n} - 1)$ に対して, c を $a+b$, d を 積 abc の異なる素因数の積としたとき, $c > d$ が成立する.

ここで, 3^{2^n} とあるのは 3 の 2^n 乗ということで, $n = 1$ であれば 3^2, $n = 2$ であれば 3^4, $n = 3$ であれば 3^8 を意味しています. 上にあげた解答例の 1 つめ, 3 つめはそれぞれ $n = 1, n = 2$ に対応しています. $n = 3$ でも不等式は成立するのかチェックしてみてください. この結果の証明はまだ難しいので行いませんが, 重要なことは,

Step 1 自然数の中で好きな数字を n とする.

Step 2 決めた n に対して, 互いに素な自然数 a, b の組 $(a, b) = (1, 3^{2^n} - 1)$ が決まる.

Step 3 上の結果より, この a, b の組は $c > d$ を満たす.

ということなので, Step 1 で n を変えれば, $c > d$ を満たす互いに素な a, b の組が無限に作れることになります (n の候補である自然数は無限にありますよね.). つまり, **「$c > d$ では無限に互いに素な a, b の組が見つかってしまうけど, d を少しだけ大きくするために $1+\epsilon$ 乗をつけて $c > d^{1+\epsilon}$ とすると, 数え切れるだけしか互いに素な a, b の組は見つからないよ. 」というのが abc 予想なのです.**

abc 予想は $c > d^{1+\epsilon}$ を満たす互いに素な a, b の組は数え切れるだけしか存在しない, つまり, ほとんどすべての互いに素な a, b の組は $c \leqq d^{1+\epsilon}$ となってしまうという予想です. a と b は互いに素なため, 素因数分解したときに同じ素因数をもつことはありません. もし **2 以上の a や b の素因数分解に 2 乗以上の累乗の形が含まれていなければ,** d の計算過程で a, b がそのまま使われ, さらに c は $a+b$ より $c \geqq 2$ となることから必ず $d > ab$ となります. 例えば,

- $a = 6, b = 7$ と決めたとすると, $c = 13$ より $d = 2 \times 3 \times 7 \times 13 = 546$ となりますが, 2×3 の部分が a から, 7 の部分が b から出てきている部分です.

- $a = 15, b = 77$ と決めたとすると, $c = 92$ より $d = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 23 = 53130$ となりますが, 3×5 の部分が a から, 7×11 の部分が b から出てきている部分です.

のようになることが確認できるでしょう. c は a, b の和であり, d は a, b の積より大きくなるので, $c > d^{1+\epsilon}$, つまり和が積より大きくなるということがこのときには起こらないことがわかります. つまり, abc 予想の a, b の組として考えられるものは, 片方が 1 である, または, 少なくとも一方は素因数分解に 2 乗以上の累乗の形が含まれているものだけとなります.

ここで, a, b がともに素因数分解として大きい累乗を含んでいたとしましょう. このとき, a, b は大きい累乗を含むため大きい数になると考えられます. よって c はさらに大きい数になるはずです. ここで, c がやはり大きい累乗を素因数分解に含んでいたとすると, d は異なる素因数の積であるため d が大きくなりません. 例えば, 次のようなときです.

- $a = 32\,(= 2^5), b = 49\,(= 7^2)$ と決めたとすると, $c = 81\,(= 3^4)$ であり, $d = 2 \times 3 \times 7 = 42$ となります.

このように, a, b, c ともに大きい累乗を素因数分解に含んでいると, $c > d^{1+\epsilon}$ が起こりえますが, abc 予想が主張していることは, このようなケースはとてもレアなケースであるということです. つまり, **「互いに素な 2 つの数がともに大きい累乗を素因数分解に含んでいるときには, その 2 つの数の和が, また大きい累乗を素因数分解に含んでいるということはとてもレアなケースですよ.」**ということを主張しているのです.

まだ書きたい話はあるのですが, これで abc 予想については終わりにしたいと思います. 難しい話に最後はなってしまいましたが, 感覚として abc 予想がどんなものかつかんでもらえましたか. では, また来週 !!