abc 予想について　その 3

前回は abc 予想の歴史についてお話ししました. 今回は内容についてお話していきたいと思います. そもそも abc 予想とは以下のような予想でした.

予想 1 (abc conjecture) $a + b = c$ を満たす互いに素な自然数の組 (a, b, c) に対し, 積 abc の互いに異なる素因数の積を d と表す. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $c > d^{1+\epsilon}$ を満たす組 (a, b, c) は高々有限個しか存在しない.

まず, 予想の 1 文目から行きましょう. まず, 互いに素ですが, これは 2 つの自然数 a, b に対して, a と b の公約数が 1 しか存在しないときに使う用語で,「2 つの自然数 a と b は互いに素である」といった使い方をします. a, b, c がそれぞれ互いに素とは, a と b, b と c, c と a がすべて互いに素であることをいいます. 3 つのペアすべてが互いに素になるように選んでこないといけないのですが, abc 予想では $a + b = c$ という条件があるため, a と b が互いに素であれば a, b, c もそれぞれ互いに素となります (この性質に関しては中学 3 年生で学習することになるでしょう.). 例えば, a と b が互いに素となるように $a = 13, b = 25$ とすると $c = 38$ となりますが, 13 と 38, 25 と 38 も互いに素となっていることが確認できるでしょう.

次に素因数です. 素数は皆さんも知っているように, 2 以上の自然数で 1 と自分自身しか約数にもたない数のことです. 自然数 n の素因数 (または素因子) とは, n を素数の掛け算で表したとき (素因数分解といいます) に出てくる素数のことをいいます. 例えば 30 を素因数分解すると $30 = 2 \times 3 \times 5$ となるので 30 の素因数は 2 と 3 と 5 になります. 24 であれば, 素因数分解は $24 = 2^3 \times 3$ となるので 24 の素因数は 2 と 3 になります (重複は 1 つとして考えます.).

この 2 つの用語が理解できれば 1 文目はわかるはずです. 先ほどの例で出てきた $a = 13, b = 25, c = 38$ を使って説明します. $(a, b, c) = (13, 25, 38)$ は, $a + b = c$ が成立しており, どの 2 つをとっても互いに素となっているため, abc 予想の条件を満たす互いに素な自然数の組となっています. これに対して, 積 abc を素因数分解すると, $13 \times 25 \times 38 = 2 \times 5^2 \times 13 \times 19$ となるので, 積 abc の素因数は 2 と 5 と 13 と 19 になります (abc を計算してから素因数分解しようとすると桁が大きくなって大変です. ある自然数に対して, 素因数分解は一通りしかありませんから, a, b, c をそれぞれ素因数分解してから組合せた方が楽です.). よって, d は $d = 2 \times 5 \times 13 \times 19 = 2470$ となります.

それでは, 練習をしておきましょう.

問題 1 abc 予想の条件のもとで, $a = 27, b = 28$ のとき d を求めてください.

$d = 2310$ となりましたか. $a = 27, b = 28$ なので $c = 55$ です. それぞれの素因数分解を考えると, $a = 3^3, b = 2^2 \times 7, c = 5 \times 11$ です. よって, abc の素因数分解は $abc = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$ となるので, $d = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ となります.

2 文目以降は長くなりそうなので, 中途半端になってしまい申し訳ないのですが次回にさせてください. 次回で書ききるべく頑張ります. では, また来週 !!