abc 予想について　その 1

コロナウイルスと, 緊急事態宣言のニュースがひっきりなしに流れている最近ですが, 2020 年 4 月 3 日に未解決問題だった "abc 予想" が証明されたというニュースが出たことを覚えていますか. 世の中には様々なジャンルのニュースが出ていますが, 数学となるとほとんど大衆の目に触れるような形でニュースが出ることはありません. おそらく数学がノーベル賞の中に含まれていないことも原因の一つでしょう.

私のうっすらとした記憶では, ここ最近, 数学のニュースが新聞, TV, インターネットなどで取り上げられたのは, 2019 年に肯定的に解決された「$a^3+b^3+c^3=33$ を満たす整数 a, b, c は存在するか」,「$a^3+b^3+c^3=42$ を満たす整数 a, b, c は存在するか」以来だと思います. その前となると, 最大の素数が更新されていくたびに出るニュースくらいです. (現在知られている最大の素数は 2018 年に発見された, 2486 万 2048 桁からなるものです.)

せっかくなので去年, 解決された上に書いた問題について少しだけお話しします. この問題のスタートは,

問題 1 $a^3+b^3+c^3=n$ (n は自然数) を満たす整数 a, b, c は存在するか

という, ディオファントス方程式といわれる問題です. 少し考えると n が 9 で割って余りが 4 または 5 のときは, 整数 a, b, c が存在しないことを証明できます. ぜひ, なぜ存在しないのかについて考えてみてください. この問題は少しずつ進展していき, 1955 年に J. C. P. Miller と M. F. C. Woollett によって, 次の結果が得られました.

結果 1 $a^3+b^3+c^3=n$ (n は 100 以下の自然数) に対し, 69 個の n に対しては関係式を満たす整数 a, b, c が存在する

というものです. 100 以下の自然数の中には, 9 で割ったときに余りが 4 または 5 となる数が 22 個含まれていますので, あと 9 個の数に対して整数 a, b, c が存在するかが未解決として残りました. 具体的には, 30, 33, 39, 42, 52, 74, 75, 84, 87 が残りました. その後, 少しずつ解決していき, 最後の砦として残っていた数が 33 と 42 だったのです. そもそも, 組合せを見つけるのはそんなに簡単ではありません. (例えば, $n=45$ のとき, $n=46$ のときについてそれぞれ a, b, c を考えてみてください.) この最後の砦は, 2019 年にどちらも A. Booker によってスーパーコンピューターを利用して解かれました. ちなみに, $n=42$ のときに見つかった解は, a, b, c ともに 17 桁の整数の組となっています.

少し "abc 予想" から脱線しましたね. 次回からは "abc 予想" についてお話をしていきたいと思います. 私自身は専門家ではないのでわからないことだらけですが, 少しでも楽しんで興味を持ってもらうべく書いていきたいと思います. それではまた来週！！